

UN MÉTODO PARA LA ELECCIÓN DIRECTA DE ALCALDES

VICTORIANO RAMÍREZ (*)

ANTONIO PALOMARES (*)

MARÍA LUISA MÁRQUEZ (*)

SUMARIO: RESUMEN. - 1. INTRODUCCIÓN. - 2. OTROS MODOS DE VOTACIÓN Y ESCRUTINIO. - 3. ¿QUÉ MÉTODO USAR? PROPIEDADES DESEABLES. - 4. EJEMPLOS PARADÓJICOS. - 5. UN MÉTODO PARA LA ELECCIÓN DIRECTA DE ALCALDES: *AGENDA MS*. - 6. COMPARACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS: DOBLE VUELTA Y *AGENDA MS*. - AGRADECIMIENTOS. - REFERENCIAS.

(*) Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Granada.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método para elecciones unipersonales. Está basado en comparaciones por pares de acuerdo con un orden, por tanto, requiere que el voto de los electores sea de tipo preferencial. El orden (o agenda) se establece de acuerdo con las primeras preferencias de los electores. El vencedor con este método o bien coincide con el vencedor del método de la doble vuelta o bien es un candidato más preferido que cualquiera de los dos que participan en la segunda vuelta y, además, el método garantiza las propiedades de unanimidad, monotonía y Condorcet, lo que le convierte en un método muy adecuado para la elección directa de alcaldes.

1. INTRODUCCIÓN

El Presidente del Gobierno ha prometido, ante las elecciones de Marzo de 2004, algunos cambios en materia electoral. Uno de ellos afecta a la elección de los alcaldes, que se hará directamente por los electores; incluso ha apuntado que se usará el método de la doble vuelta. La elección directa de los alcaldes representará un fortalecimiento importante de la democracia en lo que respecta a las elecciones municipales. El método de la doble vuelta ha sido muy usado en elecciones unipersonales, tanto en España como en muchos otros países; es mejor que el método de la mayoría simple, pero vale la pena analizar si existe algún otro método más adecuado.

Como es conocido, se tiene un problema de elección unipersonal cuando hay un conjunto de $n \geq 3$ alternativas, que las notaremos por A_1, A_2, \dots, A_n , y es necesario elegir *una* de ellas. Cuando sólo hay que elegir entre dos alternativas no se considera un problema de elección social, pues los electores sólo tienen que indicar cuál de ellas prefieren y la más votada gana.

El método de *mayoría simple* (o elección a una sola vuelta) consiste en pedirle a los electores que indiquen cuál es la alternativa más preferida y la que más votos obtiene se declara vencedora. Evidentemente el método de votación es muy sencillo y el recuento también; eso hace que sea muy usado. Supongamos que los candidatos son A, B, C, D y E; y que los votos obtenidos son los que figuran a continuación:

Candidato	A	B	C	D	E
Votos	24	23	22	20	11

Ejemplo 1

Entonces, aunque el candidato A ha obtenido menos de la cuarta parte de los votos sería el vencedor, es decir, A es la elección social cuando se usa el método de mayoría simple en el ejemplo 1. Si hay n alternativas, con el método de la mayoría simple podría salir elegida una alternativa con un porcentaje de votos poco superior a $100/n$. Con frecuencia la alternativa vencedora con este método ha recibido menos del 50% de los votos.

Precisamente, para evitar que un candidato con un porcentaje de votos pequeño sea elegido al usar el método de mayoría simple se utiliza más el método de *la doble vuelta*, que consiste en realizar una segunda vuelta, cuando con la mayoría simple, o primera vuelta, la alternativa más votada no obtiene más del 50% de los votos. En la segunda vuelta únicamente participan las dos alternativas que han obtenido mayor número de votos en la primera vuelta y, salvo empate, una de ellas gana por mayoría absoluta.

Así, con la doble vuelta, en el ejemplo 1 no se declara a ningún candidato vencedor, por no haber ganado por mayoría absoluta de los votos (serían necesarios 51), entonces se vuelve a elegir entre los dos más

votados, es decir entre A y B. Supongamos que en esa segunda vuelta A obtiene 35 votos y B 65, entonces B es el vencedor. Con ello sabemos que B es más preferido que A. Pero no podemos asegurar que B sea el candidato más preferido puesto que no sabemos qué votarían los electores si tuviesen que decidir entre B y C, o entre B y D, etc. Es más, podría suceder, por ejemplo, que E le ganase a cualquiera de los otros cuatro candidatos en enfrentamientos dos a dos. En tal caso el candidato E sería el *vencedor de Condorcet*. Con la mayoría simple podemos dar como vencedor a un candidato que sea *perdedor de Condorcet*, es decir, a uno que pierde frente a cualquier otro en una elección entre ambos. La doble vuelta evita que sea elegido un perdedor de Condorcet, pero no garantiza que sea elegido el candidato más preferido, el vencedor de Condorcet (caso de existir).

En algunas elecciones políticas existen dos candidatos muy destacados con respecto de los restantes, normalmente uno de ellos con ideología próxima a la derecha y el otro a la izquierda moderadas. Asimismo, es posible que para la mayoría de los votantes de los demás candidatos su segunda preferencia sea uno de los dos candidatos destacados. En tales casos el método de la doble vuelta es muy adecuado.

Pero la división derecha-izquierda es cada vez menos nítida; varios partidos pueden ser muy similares y, por otra parte, es deseable que pueda concurrir más de un candidato de un mismo partido. En este caso no podemos garantizar que la doble vuelta sea un método adecuado. Las elecciones presidenciales francesas de 2002 representan un buen incentivo para buscar un método mejor que la doble vuelta. En esa ocasión los resultados de la primera vuelta fueron:

CANDIDATO	% de votos
Jacques Chirac	19.71
Jean-Marie Le Pen	16.95
Lionel Jospin	16.12
François Bayrou	6.86
Arlette Laguiller	5.75
Jean-Pierre Chevènement	5.34
Noël Mamère	5.25

Oliver Besancenot	4.27
Jean Saint-Josse	4.25
Alain Madelin	3.90
Robert Hue	3.39
Bruno Mègret	2.34
Christiane Taubira	2.32
Corinne Lepage	1.88
Christine Boutin	1.20
Daniel Gluckstein	0.47

Ejemplo 2

Lógicamente, en la segunda vuelta ganó Chirac a Le Pen por un amplio margen, 82-18.

Pero ¿estamos seguros de que Chirac era el candidato más preferido? ¿Le habría ganado a Jospin si éste hubiese pasado a la segunda vuelta? No lo sabemos y, por tanto, no podemos asegurar nada. No sabemos si los franceses tienen el presidente que más preferían o no. Por otra parte, supongamos que efectivamente Chirac era el candidato más preferido por los franceses en 2002, entonces la doble vuelta habría dado una respuesta satisfactoria; ahora bien, tengamos en cuenta que varios candidatos más competían con Chirac en un mismo espectro político (tales como Bayrou, Madelin, Saint-Josse, Boutin y Lepage, ubicados en el centro derecha) y podían haberle restado votos a Chirac de forma que quedase tercero. Entonces tendríamos que el candidato más preferido no habría pasado a la segunda vuelta.

El resultado anterior no es un caso aislado. Un caso similar ocurrió en las elecciones presidenciales de El Ecuador en 2002. El sistema electoral es también la doble vuelta. Los resultados en la primera y segunda vueltas fueron:

	Gutiérrez	Noboa	Roldos	Borja	Neira	Bucaram	Otros
1ª vuelta %	20.3	17.4	15.5	14.0	12.2	11.9	8.7
2ª vuelta %	58.7	42.3					

Los dos más votados en la primera vuelta fueron Lucio Edwin Gutiérrez Borbua y Álvaro Fernando Noboa Pontón. En la segunda vuelta Gutiérrez venció a Noboa por 58.7 a 42.3.

En este caso los porcentajes de los dos candidatos más votados en primera vuelta fueron muy similares a varios de los que le siguen (Roldos, Borja, Neira y Bucaran), entonces ¿quién nos garantiza que alguno de éstos no le ganase a Gutiérrez, a Noboa y a todos los demás, en competición uno contra uno? Por tanto, tampoco sabemos si este país tiene el candidato más preferido o no.

Situaciones como las dos que acabamos de mostrar pueden producirse con frecuencia en unas elecciones municipales. Pensemos que en España hay más de 8.000 municipios, lo que supone otras tantas elecciones municipales y que en ellas, además de los partidos de ámbito estatal, participan los de ámbito autonómico, incluso partidos de carácter local, y que debe contemplarse la posibilidad de que existan candidatos independientes, así muchas segundas vueltas pueden ocurrir y la única garantía que tenemos en tales casos es que no va a ganar el perdedor de Condorcet.

2. OTROS MODOS DE VOTACIÓN Y ESCRUTINIO

Voto único transferible (VUT)

Cabe pensar que si, en ocasiones, la doble vuelta no garantiza una respuesta satisfactoria, entonces debería usarse la eliminación iterativa del candidato menos votado, o voto único transferible (VUT), que es el método usado tradicionalmente en Australia para la elección de sus diputados. Con este método no se trata de realizar un número indeterminado de vueltas en cada distrito (o en cada municipio en la elección de alcaldes), sino que los electores emiten un voto preferencial y a partir de él se efectúan las eliminaciones. Normalmente equivale a realizar más de dos vueltas, pero a los electores se les convoca en una sola ocasión en la que se les pide que ordenen los candidatos según sus preferencias. Entonces, si ninguna alternativa (o candidato) obtiene mayoría absoluta de votos se elimina la alternativa con menor número de *primeras* preferencias y el voto de los correspondientes electores pasa a la segunda preferencia que habían mostrado. El proceso se repite hasta que una de las alternativas consigue mayoría absoluta de primeras preferencias. Por ejemplo:

PREFERENCIAS	Nº DE VOTOS	RESPUESTA
A→E→D→C→B	10	
B→E→D→C→A	9	
C→B→D→A→E	8	
D→C→E→A→B	8	
E→C→D→B→A	5	Eliminar E

Ejemplo 3. Primer escrutinio con VUT

Es decir, para 10 votantes la alternativa más preferida es A, en segundo lugar es E, en tercero D, en cuarto C y la menos preferida es B; para otros 9 votantes la más preferida es B, etc.

Como ninguna alternativa es la más preferida para, al menos 21 votantes, se elimina E que es más preferida por sólo 5 votantes. Para quienes la votaron pasa a ser C su alternativa más preferida, ya que E queda eliminada. Ahora se tiene:

PREFERENCIAS	Nº DE VOTOS	RESPUESTA
A→D→C→B	10	
B→D→C→A	9	
C→B→D→A	8	
D→C→A→B	8	Eliminar D
C→D→B→A	5	

Segundo escrutinio

La alternativa C es la más preferida por 13 electores; se elimina D que tiene sólo 8 votos.

PREFERENCIAS	Nº DE VOTOS	RESPUESTA
A→C→B	10	
B→C→A	9	
C→B→A	13	Vence C
C→A→B	8	

Tercer y último escrutinio

La alternativa C tiene ya 21 votos y es declarada vencedora.

Observamos que, en el ejemplo 3, gana A si se utiliza mayoría simple, B si se usa doble vuelta y C al aplicar VUT.

En principio VUT se nos presenta como un método mejor que la doble vuelta, pero existen motivos que nos inducen a rechazarlo también, principalmente son la ausencia de algunas propiedades, concretamente no es un método monótono ni garantiza Condorcet (lo veremos más adelante).

Comparación por pares (uno contra uno) o método de Condorcet

Para aplicar este método se necesita que los electores muestren un orden preferencial sobre las alternativas, entonces se toman las alternativas de dos en dos y se comparan para determinar si existe una que vence a cualquier otra (vencedora de Condorcet). En tal caso ésta se toma como elección social. Lógicamente el vencedor de Condorcet es la elección social más adecuada en una elección unipersonal, puesto que es la alternativa preferida por más de la mitad de los electores a cualquier otra.

Para el ejemplo 3 observamos que el candidato E vence a todos los demás: A-E da 18-22, B-E da 17-23, C-E da 16-24 y D-E da 16-24. Por tanto E es el vencedor de Condorcet.

Ahora bien, este método no es aplicable en ciertos casos como, por ejemplo, en el que mostramos a continuación.

PREFERENCIAS	Nº DE VOTOS
A→B→C	60
B→C→A	50
C→A→B	40
Paradoja de Condorcet	

Al comparar las alternativas dos a dos se observa que A vence a B (por 100 a 50), C vence a A (por 90 a 60) y B vence a C (por 110 a 40). Este comportamiento recibe el nombre de Paradoja de Condorcet. Es un

caso en el que no existe vencedor de Condorcet, por tanto no es aplicable el método de las comparaciones dos a dos.

Comparaciones dos a dos según un orden o agenda

Una forma de garantizar que la elección social es el vencedor de Condorcet, cuando existe, y que el método sea aplicable aunque las preferencias presenten la paradoja de Condorcet es *no efectuar todas las comparaciones posibles* entre las alternativas, sino sólo las que se producen como consecuencia de un orden establecido para las mismas, en el que aparecen todas, al menos, una vez.

Si la agenda fuese A B C significa que se debe comparar A con B; a continuación el vencedor de ambos se compara con C, y el nuevo vencedor es la elección social. Para un candidato la última posición de la agenda es la más ventajosa (y las más desfavorables las dos primeras).

El gran problema de este método es ¿qué agenda establecer? Ahora bien, sea cual sea la agenda que se establezca, si existe vencedor de Condorcet esa es la respuesta del método.

Método Borda

Para aplicar este método los electores también deben emitir un voto preferencial. El método consiste en asignar puntos a cada preferencia en función de la posición que ocupa en el orden establecido por cada elector. Fue inventado por J. Charles Borda [6], quién propuso las siguientes puntuaciones para una elección en la que hay n alternativas: $n-1$ puntos para la alternativa que figura en primera posición, $n-2$ para la segunda, ..., *un* punto para la que figura en penúltima posición, y *cero* puntos para la última.

Tras puntuar las preferencias de cada votante, se suman los puntos y la alternativa con más puntos es la elección social.

Con el método de Borda las puntuaciones correspondientes a las preferencias del ejemplo 3

PREFERENCIAS	Nº DE VOTOS
A→E→D→C→B	10
B→E→D→C→A	9
C→B→D→A→E	8
D→C→E→A→B	8
E→C→D→B→A	5

Son las que siguen:

$$A: 10*4 + 9*0 + 8*1 + 8*1 + 5*0 = 56 \text{ puntos}$$

$$B: 10*0 + 9*4 + 8*3 + 8*0 + 5*1 = 65 \text{ puntos}$$

$$C: 10*1 + 9*1 + 8*4 + 8*3 + 5*3 = 90 \text{ puntos}$$

$$D: 10*2 + 9*2 + 8*2 + 8*4 + 5*2 = 96 \text{ puntos}$$

$$E: 10*3 + 9*3 + 8*0 + 8*2 + 5*4 = 93 \text{ puntos}$$

Por tanto, el candidato con mayor puntuación es el D con 96 puntos. Este es el vencedor con el método de Borda. Observamos que ante unas mismas preferencias de los electores al aplicar cinco métodos diferentes hemos obtenido cinco vencedores diferentes. La elección del método a emplear es un asunto muy relevante.

Las críticas al método de Borda provienen, fundamentalmente, de que los pesos propuestos no están justificados. Es uno de los métodos más investigados; otros pesos han sido propuestos con objeto de garantizar determinadas propiedades, por ejemplo, para conseguir cierta proporcionalidad cuando se emplea para una elección múltiple son recomendables los valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, [2]. Métodos tipo-Borda (con diferentes pesos) se usan para determinar el campeón en determinadas competiciones automovilísticas, la canción vencedora en algunos festivales, etc.

Uno de los inconvenientes del método de Borda es que no garantiza que el vencedor sea el vencedor de Condorcet, como hemos visto con el ejemplo anterior en el que el vencedor de Condorcet era E y el vencedor de Borda es D.

Votación aprobatoria

Uno de los métodos de elección social, de más discusión actualmente, es el de votación aprobatoria, introducido por S. Brams [1]. Con él no se pide a los electores que ordenen las alternativas según sus preferencias, sino sólo

que marquen qué alternativas aceptan (o aprueban). Se cuenta el número de aprobados que recibe cada alternativa y la que obtiene mayor número gana. Por supuesto, la votación aprobatoria no garantiza Condorcet, constituyendo así uno de sus principales inconvenientes para elecciones unipersonales.

Las variantes de este método contienen limitaciones en el número máximo de alternativas que un elector puede marcar [4]. La elección del Senado es una de esas variantes; en ella se permite marcar a lo sumo a tres candidatos.

Una cuestión importante es fijar el número de marcas que cada elector puede hacer. En tal sentido se tiene el siguiente resultado:

Teorema de Saari [7]

Supongamos que se presentan n candidatos: A_1, A_2, \dots, A_n , para ocupar un puesto y se permite marcar m de ellos. Entonces, siempre existen unas preferencias de los electores para las cuales:

- Si $m = 1$, gana A_1 ,
- Si $m = 2$, gana A_2 ,
-
- Si $m = n - 1$, gana A_{n-1} ,
- y si se aplica Borda gana A_n .

Ejemplo. Supongamos que para una elección de director de departamento se presentan cinco candidatos: A, B, C, D y E, y que las preferencias de los electores son:

PREFERENCIAS	Nº DE VOTOS
A→B→C→D→E	5
A→C→E→D→B	3
A→E→C→D→B	4
C→B→D→E→A	6
D→C→E→A→B	4
E→B→C→D→A	3
E→B→D→A→C	6
B→E→C→D→A	3

Elección de Director de Departamento

Si $m = 1$ equivale a aplicar el método de mayoría simple y el vencedor es A. Si se permite marcar dos vence B, etc. La tabla siguiente contiene las puntuaciones con cada método. En la última columna aparece la alternativa vencedora para cada caso.

ALTERNATIVA → MÉTODO ↓	A	B	C	D	E	VENCEDOR
Marcar 1	12	3	6	4	9	A
Marcar 2	12	23	13	4	16	B
Marcar 3	12	23	28	16	23	C
Marcar 4	22	23	28	34	29	D
Borda	58	72	75	58	77	E

Recuentos para la elección de Director de Departamento

3. ¿QUÉ MÉTODO USAR? PROPIEDADES DESEABLES

Hemos visto la mecánica de diferentes métodos, y hemos mostrado dos ejemplos de votaciones en las que existían cinco alternativas, cada una de las cuales podía resultar vencedora dependiendo del método usado. Entonces surge la cuestión de ¿qué método usar? La respuesta no es fácil porque cada método tiene unas ventajas y unos inconvenientes. Es decir, no existe ningún método perfecto. Pero eso no quiere decir que todos sean igualmente buenos. Hay unos métodos mejores y otros peores y, precisamente, los peores suelen ser los más usados.

Para poder decir que un método es más adecuado o menos, a la hora de resolver un problema de elección social, debemos basarnos en una tabla de propiedades lógicas que debieran verificar los métodos de elección social y a continuación ver cuáles de ellas cumple cada método. Las propiedades más relevantes son las siguientes [8]:

1. Unanimidad
2. Monotonía
3. Condorcet
4. Independencia de las alternativas irrelevantes (I.A.I.)

Unanimidad (o Pareto)

Si *todos* los electores prefieren una alternativa X antes que otra alternativa Y, entonces Y no debe ser la elección social.

Condorcet

Un método verifica Condorcet si da como vencedor al vencedor de Condorcet, siempre que exista.

Independencia de alternativas irrelevantes (I.A.I)

Esta condición indica que el orden en la elección social de las alternativas X e Y debe depender sólo de cómo los electores ordenan estas preferencias.

Concretamente, se dice que un método de elección social satisface la condición I.A.I. si se verifica lo siguiente:

Supongamos que la elección social incluye a X, pero no a la alternativa Y, supongamos, además, que uno o más votantes cambia(n) sus preferencias, pero no cambian el orden en que prefieren a X y a Y, entonces elección social no debe contener a Y a cambio de X. Es una propiedad que no la verifican la mayoría de los métodos expuestos anteriormente (un método que la verifica es el de la votación aprobatoria).

Monotonía

Si, ante unas preferencias, X es la elección social dada por un método y uno o más electores cambia(n) la alternativa X a una posición mejor (más preferida), sin que se produzca ningún otro cambio en la votación, entonces (ante las nuevas preferencias) X debe continuar siendo la elección social con dicho método.

Una vez conocidas estas cuatro propiedades que serían deseables para un método de elección social, debemos tener en cuenta el *Teorema de imposibilidad de Arrow*, que establece que si hay al menos tres alternativas y el conjunto de votantes es finito, no existe un método democrático de elección social que verifique unanimidad, I.A.I. y monotonía [8].

En la siguiente tabla se recogen las propiedades que verifican aquellos métodos que hemos descrito [8] y que pueden aplicarse a partir del voto preferencial.

	UNANIMIDAD	CONDORCET	I.A.I.	MONOTONÍA
Mayoría Simple	Si	—	—	Si
Doble Vuelta	Si	—	—	Si
Voto único tran. (VUT)	Si	—	—	—
Comparación-Agenda	—	Si	—	Si
Borda	Si	—	—	Si

En la práctica debemos considerar más propiedades y tener en cuenta otros aspectos como la facilidad de manipulación, etc., así como nuevos métodos y variantes de los anteriores. Pues, si nos tuviésemos que limitar a estos métodos y elegir uno para la elección de órganos unipersonales resultaría decepcionante tener que renunciar a una de las propiedades como unanimidad, Condorcet o monotonía. Como ocurre con todos los vistos hasta ahora. En el apartado 5 propondremos un método que verifica esas tres propiedades. Antes veamos ejemplos que muestran algunos de los resultados negativos de la tabla anterior.

4. EJEMPLOS PARADÓJICOS

Sorprende observar, en la tabla anterior, que algunos métodos obtenidos de manera bastante lógica no verifiquen ciertas propiedades también lógicas, por ello vamos a mostrar algunos ejemplos en los que eso ocurre. Ya hemos visto un ejemplo que muestra que la propiedad de Condorcet no la verifica ni mayoría simple, ni la doble vuelta, ni el voto

único transferible, ni Borda (puesto que los cinco métodos daban respuesta diferente, en el ejemplo 3).

Veamos algunos otros resultados negativos que no son tan evidentes.

Unanimidad no la verifica el método basado en comparaciones dos a dos según una agenda. Supongamos el siguiente ejemplo:

PREFERENCIAS	VOTOS
A→B→C→D	10
C→D→A→B	12
B→C→D→A	14
Agenda de comparaciones: BCAD.	

Los 36 electores prefieren C antes que D. Resulta elegida D

Al comparar B con C es eliminada C por 24 a 12. Después, al comparar B con A es eliminado B por 14 a 22. Finalmente D vence a A por 26 a 10. Así pues, D es la elección social a pesar de que todos prefieren C antes que D.

Monotonía no la verifica VUT

Supongamos que en el siguiente ejemplo se aplica VUT

PREFERENCIAS	VOTOS
A→D→C→B	2
A→C→D→B	6
D→C→A→B	10
B→C→D→A	12
C→B→D→A	7
Las eliminaciones con VUT son: C, A. Finalmente gana B	

Supongamos ahora que los dos primeros electores acordasen cambiar su voto para beneficiar a B, pasándolo de la última posición a la primera y desplazando los demás hacia atrás.

PREFERENCIAS	VOTOS
$B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C$	2
$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$	6
$D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$	10
$B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$	12
$C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$	7

Las eliminaciones con VUT son: A, D. Finalmente gana C

Pero esa mejora para B le ha supuesto ser eliminado.

I.A.I. no la verifican la mayoría de los métodos

Por ejemplo, si usamos mayoría simple para las preferencias de la primera y tercera columnas de la tabla de preferencias siguiente.

PREFERENCIAS	VOTOS	PREFERENCIAS
$A \rightarrow C \rightarrow B$	7	$A \rightarrow C \rightarrow B$
$C \rightarrow A \rightarrow B$	5	$C \rightarrow A \rightarrow B$
$B \rightarrow C \rightarrow A$	3	$C \rightarrow B \rightarrow A$

Las posiciones relativas de A y C, en las columnas primera y tercera, no cambian. Sin embargo para la primera columna vence A y para la tercera vence C al usar la mayoría simple.

5. UN MÉTODO PARA LA ELECCIÓN DIRECTA DE ALCALDES: *AGENDA MS*

A partir de ahora vamos a centrar nuestra atención en la elección de alcaldes y exponer algunas opiniones acerca del método a usar. De antemano no es indiferente que se trate de una elección u otra. Por ejemplo la votación aprobatoria está funcionando de manera satisfactoria en la elección de presidente de diversos organismos académicos, como la AMS, la IEEE, etc. Es un buen método ante elecciones en las cuales la votación sea sincera. Pero no ha sido usado en elecciones políticas.

En elecciones de tipo político muchos electores van a emitir un voto estratégico. Por ejemplo, un elector que aprueba a los candidatos A y B, pero entre ellos prefiere mucho más al A, puede temer darle el aprobado a ambos porque, en tal caso, es posible que con su voto consiga que venza B en lugar de A.

La mayoría simple es un método muy sencillo de aplicar tanto a la hora de votar como a la hora del escrutinio, pero usa muy poca información y puede dar como vencedor al perdedor de Condorcet. No debiera usarse en la elección de cargos unipersonales, por tanto, debería descartarse en la elección de Alcaldes.

El método de la doble vuelta induce a los partidos a presentar sólo a un candidato, pues de presentar varios pueden quedar todos eliminados en la primera vuelta (la presencia en las elecciones presidenciales francesas de Chevènement, ex ministro de Jospin, pudo ser la causa de que Jospin no consiguiera una de las dos primeras posiciones). Además la doble vuelta no garantiza Condorcet.

El VUT no es ni monótono, ni consistente, ni está justificado el proceso de eliminación.

Borda tampoco garantiza Condorcet ni están justificados los pesos que usa (aún así creemos que es preferible a los tres anteriores).

En la votación aprobatoria los simpatizantes de un partido optarán por aprobar sólo a los candidatos de dicho partido, y si hay un candidato por partido entonces este método tienen un efecto similar a la mayoría simple.

Un método basado en comparaciones dos a dos de acuerdo con una agenda verifica Condorcet, pero puede fallar ante la unanimidad (como se ha visto en un ejemplo anterior, donde los 36 electores preferían C antes que D y era elegido D con la agenda BCAD). Ahora bien, hay $n!/2$ agendas diferentes y posiblemente algunas de ellas garanticen unanimidad. ¿Será posible conocer alguna de las que garantizan unanimidad? La respuesta es afirmativa. Además hay muchas soluciones.

Supongamos que los electores emiten un voto preferencial y que elaboramos la agenda de acuerdo con las primeras preferencias, de forma que la primera alternativa en la agenda sea la que aparece menos veces en primera posición en la votación preferencial (en caso de empate se recurriría a las segundas preferencias, etc.). Esta agenda la denominaremos *Agenda MS*, porque normalmente se obtiene con la información de la mayoría simple [5].

A continuación aplicamos las comparaciones de acuerdo con esa agenda. Por ejemplo, recuperamos el ejemplo para el que fallaba la unanimidad, pero ahora usamos la Agenda MS, es decir, las preferencias son

PREFERENCIAS	VOTOS
A→B→C→D	10
C→D→A→B	12
B→C→D→A	14
Agenda de comparaciones: D A C B. Vencedor B	

La alternativa B es la más preferida para 14 votantes, C para 12, A para 10 y ninguno tiene como más preferida a D, así pues la agenda es *D A C B*.

Entonces: D vence a A por 26 a 10, C vence a D por 36 a cero y B vence a C por 24 a 12 con lo cual la elección social es B. *Agenda MS verifica siempre unanimidad*, ya que si X es preferida a Y por todos los electores, entonces Y está en la ordenación antes que X y para ser Y vencedora tendría que ganarle a X, que es imposible.

Volviendo al ejemplo 2, de las elecciones presidenciales francesas, vamos a establecer un supuesto voto preferencial y aplicar Agenda MS. Para facilitar el recuento, consideramos sólo 16 ordenaciones de preferencias diferentes, y todas ellas parciales y con votos proporcionales a los porcentajes obtenidos por los diferentes líderes en la primera vuelta. Concretamente, suponemos que el resultado de una votación preferencial hubiese sido el siguiente:

PREFERENCIAS	VOTOS
Chirac→Bayrou→Madelin→Boutin→Chevènement	1971
Le Pen→Mègret	1695
Jospin→Chevènement→Mamère→Hue→Taubira	1612
Bayrou→Chirac→Madelin→Boutin→Lepage	686
Laguiller→Besancenot→Gluckstein→Jospin	575
Chevènement→Jospin→Mamère→Hue→Bayrou	534
Mamère→Chevènement→Jospin	525
Besancenot→Laguiller→Gluckstein→Jospin	427
Saint-Josse→Boutin→Lepage→Chirac	425
Madelin→Bayrou→Chirac→Lepage	390
Hue→Taubira→Mamère→Chevènement→Jospin	339
Mègret→Le Pen→Boutin	234
Taubira→Hue→Mamère→Jospin→Chevènement	232
Lepage→Saint-Josse→Boutin→Chirac	188
Boutin→Saint-Josse→Chirac→Lepage	120
Gluckstein→Besancenot→Laguiller→Jospin	47

La Agenda MS es: Gluckstein-Boutin-Lepage-Taubira-Mègret-Hue- ...-Le Pen -Chirac, es decir de abajo hacia arriba en la tabla del ejemplo 2. El vencedor de cada comparación aparece en negrita:

Gluckstein-**Boutin**; **Boutin**-Lepage; **Boutin**-Taubira; **Boutin**-Mègret;
Boutin-Hue; Boutin-**Madelin**; **Madelin**-S. Josse; **Madelin**-Besancen.;
Madelin-**Mamère**; Mamère-**Chevèn.**; **Chevèn.**-Laguiller; **Chevèn.**-Bayrou;
Chevèn.-**Jospin**; **Jospin**-Le Pen; **Jospin**-Chirac;

Con esta simulación, la última comparación la habrían protagonizado Chirac y Jospin y ganaría Jospin por 4291 frente a 3660 (no suman el total de votos porque hemos supuesto que muchos electores no incluirían a ninguno de estos dos candidatos entre su lista de preferencias).

Dado que el método de la doble vuelta ha sido uno de los más usados en elecciones de puestos unipersonales, tanto en España como en otros países, pasamos a continuación a efectuar una comparación más extensa entre ambos.

6. COMPARACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS: DOBLE VUELTA Y AGENDA MS

Las principales ventajas del método Agenda MS con respecto a la doble vuelta son las siguientes:

- i) Verifica Condorcet, monotonía [8] y unanimidad, mientras que la doble vuelta no verifica Condorcet, como se vio en el ejemplo 3.
- ii) Ahorra tiempo al no tener que realizar una segunda votación. Con la doble vuelta varios miles de municipios tendrían una segunda jornada electoral.
- iii) Ahorra dinero. Concretamente el coste para la administración de la segunda jornada electoral en los municipios en los que ningún candidato gane en la primera vuelta por mayoría absoluta y el coste (al menos en tiempo) para los electores.
- iv) No castiga, de manera significativa la participación, de varios candidatos de un mismo partido. Cuando compiten varios candidatos de ideología similar es muy posible que no pase ninguno a la segunda vuelta, al repartirse los votos en la primera vuelta, mientras que con la Agenda MS esos votos terminan uniéndose de nuevo.
- v) Si el vencedor con el método «Agenda MS» no es el mismo que el vencedor con método de la doble vuelta, es porque el vencedor con Agenda MS es más preferido que cada uno de los dos que pasan a la segunda vuelta, puesto que les ha ganado a cada uno por separado. En el ejemplo anterior, Jospin tuvo que vencer primero a Le Pen y después a Chirac para declararse vencedor. Por tanto, el vencedor con agenda MS está más legitimado que el vencedor con la doble vuelta.

Por otra parte el método agenda MS tiene pequeños inconvenientes con respecto a la doble vuelta:

- i) El procedimiento de votación es algo más complejo, ya que agenda MS requiere emitir un voto preferencial (total o parcial) de los candidatos.
- ii) El escrutinio hay que informatizarlo (tanto la lectura de las papeletas como el cálculo de la agenda y las comparaciones que calculan el vencedor), puesto que de no ser así se haría interminable. Ahora bien, con la tecnología actual, esta informatización es sencilla.

Así pues, el método basado en la agenda MS es preferible al de la doble vuelta, salvo que se vaya a aplicar en un país que tenga un alto índice de analfabetismo o un desarrollo en la tecnología informática muy precario, que no es el caso de España. En un momento en el que se empieza a pensar en el voto electrónico, el método agenda MS no representa una gran dificultad.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al Ministerio de Educación y Ciencias y a FEDER la cofinanciación del Proyecto SEC2001-3117, que nos permite sufragar los gastos de nuestra investigación en representación proporcional y elección social. Y a la Junta de Andalucía por su apoyo a través del grupo FQM-191.

REFERENCIAS

- BRAMS, S. & FISHBURN, P., *Approval Voting*, Birkhäuser, Boston, 1983.
- RAMÍREZ, V. y PALOMARES, A., «Aspectos matemáticos de las elecciones a Claustro Universitario de acuerdo con la LOU», *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5.3, 2002, pp. 589-619.
- RAMÍREZ, V., Matemática Electoral, El Lenguaje de las matemáticas en sus aplicaciones, *Ministerio de Educación Cultura y Deportes*, 2002, pp. 221-258.
- From principles of representation to the electoral methods, Meeting on Analysis and Design of Electoral Systems, Oberwolfach, 2004.
- RAMÍREZ, V., PALOMARES, A. y MÁRQUEZ M. L., «Elegir un director, un alcalde, un presidente», *Revista Uno.*, nº 36, 2004.
- SAARI, D., *Geometry of Voting*, Springer-Verlag, 1994.
- *Chaotic Elections!*, *A Mathematician Looks at Voting*, AMS, 2001.
- TAYLOR, A., *Mathematics and Politics*, Springer-Verlag, 1995.